Б.2. Метод случайных полей

В последние годы все большее внимание геологами и геотехниками уделяется стохастическому анализу данных инженерно-геологических и геотехнических исследований с точки зрения их надежности. Традиционно детерминированный анализ надежности основан на вычислении редких событий, которые нарушают критерии безопасности или работоспособность конструкции/основания с использованием постоянных значений характеристик (параметров) в пределах выделенных инженерно-геологических элементов. Напротив, в стохастическом подходе, надежность зависит от чувствительности к пространственной изменчивости свойств грунта в относительно высоком диапазоне вероятностей. Пространственная изменчивость обычно присуща таким свойствам грунтов, как прочность и деформируемость.

Ключевая проблема заключается в том, что простой математической функцией или детерминированной моделью трудно точно описать пространственную изменчивость грунта, чтобы вывести значение в местоположении без выборки из ограниченных или разреженных данных изысканий, что приводит к неопределенности в пространственном прогнозировании. Увеличение плотности выборки, безусловно, может повысить точность прогнозирования, но это приводит к более высокой стоимости изысканий.

Необходимость использования случайных полей объясняется следующим образом. Натурные измерения выполняются по довольно грубой сетке точек (выработкам) в массиве грунта, определяемая нормативными требования, например, СП 47.13330.2016. Такими измерениями являются, например, свойства грунта, параметры статического зондирования, толщина слоя и тип грунта. Задача состоит в том, чтобы получить из малого объема данных нормативных выработок закономерности о распределении измеренного свойства во всем исследуемом массиве грунта, в том числе и в необследованных местах.

В компьютерном приложении случайное поле должно быть дискретизировано в конечный набор случайных величин. Точки дискретизации обычно являются узлами или точками сборки конечно-элементной модели, где наблюдаемый параметр в каждой точке дискретизации является случайным. Как следствие, количество случайных переменных может быть очень высоким, что препятствует использованию точных методов стохастического вычислений, таких как методы **Монте-Карло**.

Поэтому основной целью разработки программного обеспечения для моделирования случайного поля является уменьшение размерности проблемы при сохранении в нем изменчивости и корреляционной структуры.

В следующем разделе приводится общее математическое описание случайного поля, а также некоторые методы генерации случайных полей.

Случайное поле представляет собой, набор значений, которые связаны с одномерным (1D) или многомерным пространством (2D, 3D). Значения в случайном поле обычно пространственно коррелированы, что означает, что можно ожидать, что смежные значения (на основе статистики и теории вероятностей) не будут отличаться так сильно, как значения, которые находятся дальше друг от друга. Пространственную изменчивость можно описать (в смысле второго момента) **средним значением**, **стандартным отклонением**, **коэффициентом вариации** и **автокорреляционная функция**.

Случайное поле $H(\mathbf{x},\theta)$ представляет собой пространственное распределение коррелированных случайных величин. Одна точка случайного поля состоит из случайного значения θ и соответствующих ей пространственных координат **x**. Для описания в пространстве параметров используется **ковариционная функция (см., автокорреляционная функция)** $Cov(\mathbf{x},\mathbf{x}')$, которая позволяет найти значения параметров в различных точках, в зависимости от их положения относительно друга.

Если случайная величина, на каждой точке $\boldsymbol{x}$ является скаляром, то случайное поле называется одномерным. Если случайная величина является вектором, поле называется многомерным. Размерность D случайного поля – это размерность его топологического пространства Ω. Обычно различают одно – и многомерное случайное поле, первое также называют случайным процессом. Случайное поле называется гауссовым, если распределение $(H(\mathbf{x}_1,\theta),\ldots, H(\mathbf{x}_n,\theta))$ для любого $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)\in\Omega$ определяется средним значением μ и ковариационной функцией $Cov(\mathbf{x},\mathbf{x}')$. Аппроксимация $\hat{H}(\mathbf{x},\theta)$ непрерывного случайного поля $H(\mathbf{x},\theta)$ конечным множеством случайных величин $\{\chi_i, i=1,\ldots,M\}$ называется дискретизацией случайной области.

Ковариационная функция может быть выражена как $COV(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}')\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$, где σ – стандартное отклонение функции случайного поля, а ее коэффициент корреляции ρ определен в диапазоне [–1,1].

Ковариационные функции $COV(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ с высокой корреляцией на малых расстояниях между точками имеют очень похожие значения. Это приводит к образованию кластеров точек с одинаковыми значениями. Распределение этих кластеров по размерам описывается спектром мощности. Корреляционная функция и спектр мощности представляют собой два разных способа описания случайных величин. Спектр мощности может быть преобразован в соответствующую корреляционную функцию и наоборот.

Для моделирования пространственной изменчивости грунтов. необходимы как минимум три параметра: (1) среднее значение μ; (2) мера дисперсии, σ^2 (стандартное отклонение или коэффициент вариации), и (3) масштаб флуктуации θ, который выражает корреляцию свойств с расстоянием. Масштаб флуктуации может быть определен количественно путем подгонки выборки автокорреляционных функций к автокорреляционной модели.

Масштаб флуктуации является кратким показателем длины корреляции в пространстве. В пределах разделительных расстояний (лага), меньших, чем масштаб флуктуации, ожидается, что отклонения от функции тренда будут демонстрировать значительную корреляцию. Когда расстояние между двумя точками выборки превышает масштаб флуктуации, можно предположить, что между флуктуациями в измерениях существует незначительная корреляция. Хотя была отмечена зависимость от типа грунта, масштаб флуктуации не является неотъемлемым свойством случайной величины и он может быть определен с использованием различных методов, таких как подгонка автокорреляционной модели, вычисление функции уменьшения дисперсии и подгонка **вариограммы**.